

## CAPITULO 4 FLUJOS OSCILATORIOS

### 4.1.- Conceptos Básicos

Cuando se trata del transporte de sedimentos por parte del viento o del agua en general se piensa que este movimiento se efectúa en una dirección determinada y que ella se mantiene durante todo el tiempo en forma invariable. Aun en el caso de los ríos que presentan al fluido constreñido por un canal, el flujo es realmente tridimensional ya que sufre variaciones en los tres ejes de coordenadas. Sin embargo, uno puede suponer una dirección de movimiento general a nivel de valores medios. En cambio, cuando el transporte de sedimento se produce en el mar, esas condiciones cambian abruptamente ya que por las características de los procesos que allí ocurren, gran parte de los movimientos son oscilatorios. Es decir que el flujo cambia de dirección dentro de un intervalo de tiempo regular definido por la periodicidad del fenómeno al que está asociado. Estos procesos pueden ser involucrados en general dentro del marco de la teoría de ondas de las cuales rescatamos como principales fuentes de energía a las mareas y a las olas gravitatorias. La Fig.4.1 presenta los principales tipos de ondas observables en el océano, sus *fuerzas generadoras* y *restitutivas*, y la energía relativa que cada una de ellas lleva asociada.

Por fuerzas generadoras se entiende a aquellas, como el caso del viento o la atracción gravitatoria del sol y la luna, que producen un desplazamiento de la interfase de su posición de reposo. Ese desplazamiento que se representa por el perfil de la onda (Fig. 4.2) indica el nivel de energía que es transferido por el factor generado al fluido. Por otro lado, las fuerzas restitutivas son aquellas que tratan de volver el fenómeno a su estado de equilibrio inicial. En el caso particular de las ondas, estas fuerzas intentan volver la superficie de la interfase a su nivel de reposo.

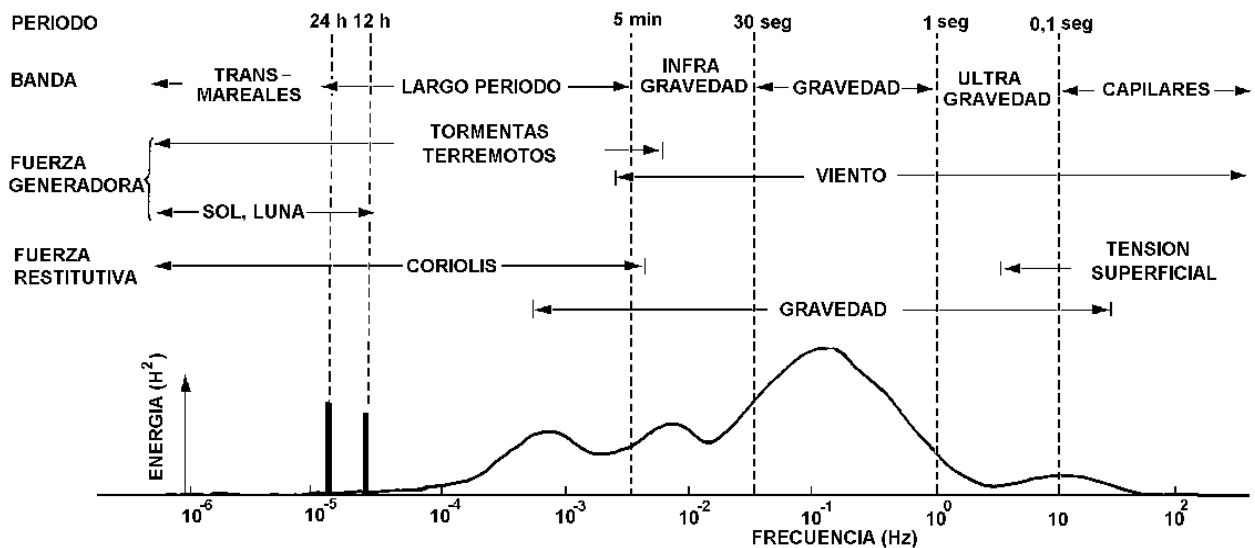


Fig.4.1.- Relación entre los distintos tipos de ondas, sus fuerzas generadoras y restitutivas, y el orden de su energía relativa (modificado de Kinsman, 1965).

El movimiento sinusoidal que induce el transporte de energía asociado a las ondas en general da lugar a movimientos orbitales que pueden asimilarse localmente a flujos unidireccionales. El caso típico es el de las corrientes de marea dentro de un canal donde por cierto intervalo de tiempo, del orden de 5 o 6 horas, las parcelas de agua se mueven en una dirección general media similar a lo que ocurre en los ríos. Pero en determinado momento la dirección se revierte alrededor de  $180^\circ$ .

Con respecto al transporte de sedimentos en flujos oscilatorios, el interés de este texto está dirigido hacia lo que sucede dentro de la capa límite producida por ellos. No obstante, es necesario hacer una introducción general a la teoría de olas con el objeto de dar al lector los elementos básicos para el entendimiento de aquellos procesos. Además se incluyen aportes iniciales sobre mareas y la interacción entre olas y corrientes.

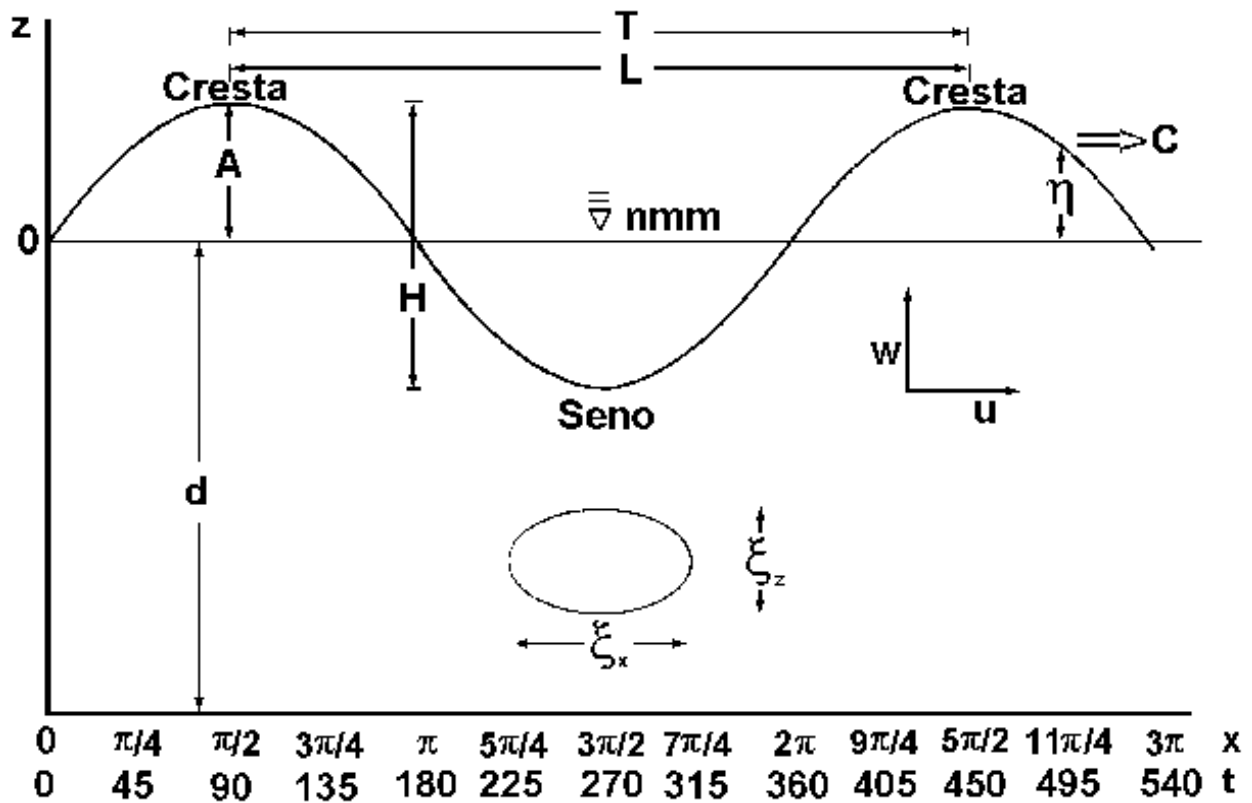


Fig.4.2.- Diagrama de definiciones de una onda.

#### 4.2.- Teoría de Olas

Dentro de los diversos tipos de ondas se suele estar más familiarizado con las olas generadas por el viento, en especial cuando estas se acercan a una playa. Justamente, las definiciones se basarán en las olas gravitacionales (Fig. 4.1) pero la mayor parte de las mismas pueden trasladarse fácilmente a otros tipos de ondas.

Las olas son ondas superficiales originadas por el viento en mar abierto donde adquieren sus características básicas (período, dirección, energía, etc.). En realidad son perturbaciones en la interfase agua-aire que se trasladan desde el *área de generación* hasta la *zona de rompiente* en la costa. A lo largo de su trayecto se interrelacionan con vientos, corrientes y/u otras olas de tal forma que algunas de sus características sufren modificaciones y en algunos casos las hacen desaparecer. El nombre de *gravitatorias* se deriva de la fuerza restitutiva que actúa sobre la perturbación a los efectos de volver la superficie a su nivel de reposo.

La propiedad principal de las olas es la de representar un movimiento periódico, o en otras palabras, el movimiento se repite luego de un intervalo de tiempo fijo para un observador ubicado en un lugar preestablecido. La Fig.4.2 es un esquema representativo de la notación empleada y de los elementos constitutivos de una onda clásica. La representación matemática de una onda superficial se da en función del desplazamiento de la superficie del mar (O) desde su posición de reposo. De la teoría lineal de olas resulta que dicha función tiene la forma

$$\eta(x,t) = A \cos(kx - \sigma t) \quad [4.1]$$

donde A es la *amplitud de la ola*, que para este caso en particular es  $A = H/2$ ; k es el *número de onda* ( $= 2\pi/L$ ) siendo L la *longitud de onda*, y  $\sigma$  es la *frecuencia angular de la onda* ( $= 2\pi/T$ ) con T el *período de la onda*. Definimos más estrictamente a L como **la distancia entre dos elementos o puntos similares de la onda**, p.e., entre cresta y cresta o seno y seno (Fig.4.2); mientras que el período es el **tiempo que tardan en pasar por un punto fijo dado dos elementos o puntos**

**similares consecutivos de una onda.** La longitud de onda y el período de la misma están relacionados entre sí a través de la *velocidad de traslación de la ola* (C).

$$C = \frac{L}{T} = \frac{\sigma}{k} \quad [4.2]$$

La ec. [4.1] suele llevar a confusión a aquellos con escaso manejo matemático, por lo tanto se dirá que esa es la expresión general de la ola, pero cuando se quiere dibujar a una ola de este tipo se debe establecer la coordenada que interesa representar. Por ejemplo, para la forma de  $\eta = f(t)$  se emplea

$$\eta(t) = A \cos(\sigma t)$$

o bien para el caso de  $\eta = f(x)$  es

$$\eta(x) = A \cos(kx)$$

Aquí se muestra a la ola en su forma bidimensional (x,z), una forma más generalizada debería incluir además términos en el eje y, pero para el presente análisis se supondrá que las olas tienen crestas muy largas y que las variaciones de sus propiedades a lo largo de y son = 0. El signo de Ft en [4.1] es indicativo de la dirección de desplazamiento de la ola. Se ha tomado como convención que cuando el movimiento es hacia la derecha tendremos -Ft y será +Ft cuando la propagación se hace hacia la izquierda.

Para obtener los diferentes elementos representativos de las olas se derivarán sus ecuaciones en base a la teoría lineal de olas desarrollada por Airy (1845). Esta teoría se puede aplicar con bastante acierto en aguas profundas e intermedias pero no puede predecir con exactitud los procesos que ocurren cuando la ola se ve afectada por la cercanía del fondo. Sin embargo, a los fines didácticos es mucho más simple de explicar que otras más exactas pero complejas a las que se hará referencia a medida que se encuentren problemas que la teoría lineal no puede resolver.

Como se indicara anteriormente, las olas en realidad son perturbaciones de la superficie de un fluido representadas por la energía de esa perturbación que se ve en función de su altura. De esta forma se dirá que cuando una ola se mueve no lo hace el agua sino que es la energía la que se traslada. Surge entonces que existen dos tipos de olas: las *progresivas* y las *estacionarias*. Las primeras son casi todas las olas y en ellas se transmite la perturbación a lo largo de la superficie de discontinuidad. En cambio, en las olas estacionarias la energía está contenida dentro de su longitud de onda y no sufre desplazamientos. Estas últimas son olas que se encuentran contenidas dentro de bordes bien definidos como ser un estuario o lago. Veamos entonces un tren de olas de tipo progresivo que se mueve sobre un fondo plano, horizontal e impermeable, entonces las suposiciones básicas de la teoría lineal son las siguientes:

- 1) El flujo es de tipo bidimensional.
- 2) El flujo es incompresible, es decir que por la ec. [3.10] tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [4.3]$$

donde u y w son respectivamente las componentes horizontal y vertical de la velocidad orbital.

- 3) El flujo es irrotacional, lo cual quiere decir que la partículas individuales no rotan sobre su eje sino que en todo momento mantienen su posición en el espacio, siendo representado por la relación de vorticidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [4.4]$$

- 4) El fluido no posee fricción interna o viscosidad, siendo esto real salvo muy cerca del fondo.

Si estas suposiciones son válidas, se puede representar a las componentes horizontal y vertical de la velocidad a través de la función *velocidad potencial*  $M = M(x,z,t)$  de forma tal que

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad [4.5a]$$

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad [4.5b]$$

La velocidad potencial es la velocidad que posee el flujo cuando no es afectado por cualquier tipo de fricción y en todo momento es perpendicular a las líneas de corrientes que se describió en el Capítulo 3. Si se reemplazan las ecuaciones [4.5] en [4.3] se obtiene la *ecuación de Laplace* para continuidad en función de la velocidad potencial

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi = 0 \quad [4.6]$$

Cualquier tipo de solución de la ec. [4.6] debe obedecer a una serie de condiciones de contorno específicas. Para el caso de las olas estas son:

a) Se considera que el fondo es impermeable, no hay movimiento de agua a través del mismo, por lo tanto

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \equiv 0 \quad \text{en } z = -d \quad [4.7]$$

b) Por otro lado, el agua siempre está contenida dentro de su superficie de forma tal que las partículas se mueven a la misma velocidad con que cambia de forma la superficie del mar

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \equiv w \quad \text{en } z = \eta \quad [4.8]$$

c) En la superficie, la presión (p) se obtiene a través de la *ecuación de Bernoulli* como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz \quad [4.9]$$

d) Por último se supone además que la *pendiente de la ola* es pequeña ( $H/L \ll 1$ ) y que la profundidad del agua es mucho mayor que la altura de la ola ( $d/H \gg 1$ ).

La solución de la ec. [4.6] empleando las condiciones de contorno indicadas es

$$\Phi = -AC \frac{\cosh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \sigma t) \quad [4.10]$$

A partir de [4.10] se puede entonces obtener todos los parámetros de la ola como ser

$$\sigma^2 = gk \tanh(kd) \quad [4.11]$$

o expresada de otra manera queda

$$C^2 = \frac{g}{k} th(kd) \quad [4.12]$$

A su vez sabiendo que  $C = L/T$  y que  $k = 2B/L$ , [4.12] se transforma en

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} th(kd) \quad [4.13]$$

Las velocidades orbitales se hallan directamente de las definiciones originales [4.5]

$$u = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = A\sigma \frac{ch[k(d+z)]}{sh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \quad [4.14a]$$

$$w = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = A\sigma \frac{sh[k(d+z)]}{sh(kd)} \sen(kx - \sigma t) \quad [4.14b]$$

Para obtener la *aceleración* tanto horizontal como vertical basta con derivar las ecs. [4.14] con respecto al tiempo

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = A\sigma^2 \frac{ch[k(d+z)]}{sh(kd)} \sen(kx - \sigma t) \quad [4.15a]$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -A\sigma^2 \frac{sh[k(d+z)]}{sh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \quad [4.15b]$$

Si en lugar de derivar, se integra en el tiempo las ec. de velocidad orbital se obtienen los *desplazamientos horizontal y vertical*

$$\xi_x = \int u dt = -A \frac{ch[k(d+z)]}{sh(kd)} \sen(kx - \sigma t) \quad [4.16a]$$

$$\xi_z = \int w dt = A \frac{sh[k(d+z)]}{sh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \quad [4.16b]$$

La *órbita de una partícula* se puede obtener elevando al cuadrado las ec. [4.16] y resolviendo cada una de ellas por el seno y coseno y luego sumando. Teniendo en cuenta que  $\sen^2 + \cos^2 = 1$  queda

$$1 = \frac{\xi_x^2}{A^2 \frac{ch^2[k(d+z)]}{sh^2 kd}} + \frac{\xi_z^2}{A^2 \frac{sh^2[k(d+z)]}{sh^2 kd}} \quad [4.17]$$

La curva resultante es una elipse cerrada que representa el movimiento de una partícula de agua durante el pasaje de la perturbación a una profundidad  $z$  cualquiera. El primero de los términos de la derecha representa al eje mayor de la elipse y el otro al eje menor.

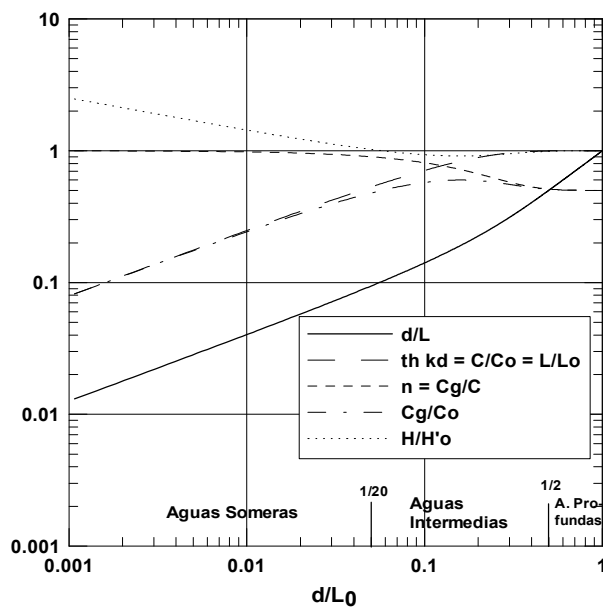


Fig.4.3.- Variaciones de los parámetros de la ola en función de  $d/L_0$ .

Todas las ecuaciones dadas hasta el momento representan el caso general de la onda para la teoría lineal de Airy y las mismas están resumidas en la Tabla 4.1 para condiciones de aguas intermedias. La aplicación directa de ellas a todos los casos puede resultar bastante complicada aún empleando las tablas que existen al efecto (p.e., US Army Corps of Engineers, 1977, volumen III). Pero para determinadas condiciones de interés se pueden hacer aproximaciones válidas. Estas aproximaciones se basan en el cociente de *profundidad relativa*  $d/L$ , donde en este caso  $L$  es la longitud de la onda en el lugar donde se define  $d$ . En la literatura se pueden encontrar que algunos autores prefieren emplear  $d/L_0$ , donde  $L_0$  es  $L$  en aguas profundas. En general se dirá que cualquier variable es de aguas profundas cuando posea el subíndice "o", mientras que será de aguas someras si su subíndice es "s". Si no posee subíndice se refieren al caso general o de aguas intermedias. La separación entre aguas intermedias y las otras dos se determina por

$$\frac{d}{L_0} \geq \frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{aguas profundas}$$

$$0,5 > \frac{d}{L_0} > \frac{1}{20} = 0,05 \quad \text{aguas intermedias}$$

$$\frac{d}{L_0} \leq \frac{1}{20} = 0,05 \quad \text{aguas someras}$$

La Fig.4.3 muestra las variaciones que se producen en los diferentes parámetros de la ola a medida que esta pasa de condiciones de aguas profundas a someras. Conviene observar que sucede con las órbitas en aguas profundas. En estas condiciones el término  $kd$  es muy grande por lo tanto  $\text{sh } kd \approx \text{ch } kd = e^{kd/2}$  y obviamente la  $\text{th } kd$  tiende a 1. Si se aplican estas aproximaciones a la ec. [4.17] se obtiene

$$1 = \frac{\xi_x^2}{A^2 e^{2kz}} + \frac{\xi_z^2}{A^2 e^{2kz}} \quad [4.18]$$

Lo cual resulta ser la ecuación de un círculo cuyo radio es  $A e^{kz}$  (Fig.4.4a). El hecho de que el radio del círculo sea proporcional a la profundidad implica que si bien la forma no va cambiar con ella sí lo hará su tamaño. Analizando la relación se ve que para una profundidad  $z = -L/2$  se tiene un radio de solo un 4% del radio en superficie y para  $z = -L$  el mismo será de 0,2%. Lo cual demuestra que el efecto del pasaje de una ola sobre un objeto debajo del agua será apreciable solamente si el objeto se encuentra a una distancia de la superficie menor que la mitad de la longitud de la ola que pasa por el sitio. Por debajo de esta profundidad todo movimiento debido a la ola es despreciable. Este concepto tiene una importancia crucial a la hora de establecer la capacidad de las olas para poner en movimiento y transportar al sedimento. A profundidades mayores que  $L/2$ , la ola es incapaz de movilizar el sedimento de fondo.

En cambio para aguas someras ( $d/L_0 \neq 0,05$ ) las funciones hiperbólicas tienen un comportamiento diferente al caso anterior. El  $\text{ch}(kd)$  tiende a 1 mientras que el  $\text{sh}(kd)$  tiende a  $kd$ , implicando que la  $\text{th}(kd)$  también tiende a  $kd$ . Con estas aproximaciones aplicadas a las ecuaciones en aguas intermedias la ec [4.17] resulta

$$1 = \frac{\xi_x^2}{\frac{A^2}{(kd)^2}} + \frac{\xi_z^2}{\frac{A^2 [k(d+z)]^2}{(kd)^2}} \quad [4.19]$$

Esta es la ecuación de una elipse peculiar ya que el eje mayor es independiente de  $z$ , por lo tanto se mantiene siempre constante no importa donde se ubique en la columna de agua. Mientras que el eje menor se reduce rápidamente de forma tal que en  $z = -d$ , el término de desplazamiento vertical será cero (Fig.4.4b). Entonces, el movimiento del agua sobre el fondo será únicamente de vaivén.

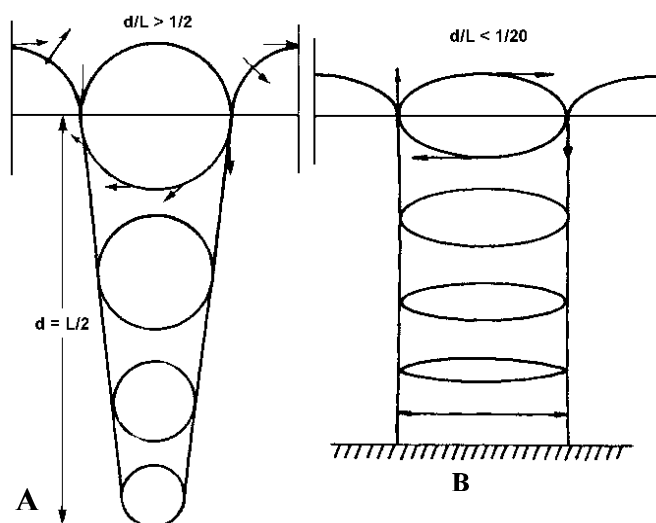


Fig.4.4.- Forma de las órbitas de las partículas en a) aguas profundas, b) aguas someras.

Utilizando el mismo tipo de procedimiento se puede obtener todos los otros términos de la Tabla 4.1 para aguas profundas y someras. Sin embargo, desde el punto de vista del transporte de sedimentos interesa particularmente analizar el comportamiento del valor máximo de la componente horizontal de la velocidad orbital. Obviamente el mismo alcanzará esta condición cuando el  $\cos(kx - Ft) = 1$ , lo que ocurre cuando la cresta o el seno de la ola pasa por el sitio de medición. A partir de la ec. [4.14a] la *máxima velocidad orbital* ( $u_m$ ) en condiciones de aguas profundas es

$$u_m = A\sigma e^{kz} \quad [4.20]$$

En la superficie ( $z = 0$ ) resulta  $u_m = HB/T$  y luego disminuye exponencialmente hasta hacerse despreciable a  $d = -L/2$ . En cambio en aguas someras el valor de la velocidad máxima es constante en toda la columna de agua, al igual que su desplazamiento, siendo entonces

$$u_m = \frac{HC}{2d} \quad [4.21]$$

Tabla 4.1. Ecuaciones generales de las olas para la teoría lineal para aguas profundas, intermedias y someras.

Var.	Aguas Profundas	Aguas Intermedias	Aguas Someras
M	$-AC_0 e^{kz} \text{sen}(kx - \sigma t)$	$-AC \frac{\cosh[k(d+z)]}{\text{senh}(kd)} \text{sen}(kx - \sigma t)$	$\frac{AgT}{2\pi} \text{sen}(kx - \sigma t)$
C	$\frac{gT}{2\pi} = \frac{g}{\sigma}$	$\frac{gT}{2\pi} \text{tgh}(kd)$	$\sqrt{gd}$
L	$\frac{gT^2}{2\pi}$	$\frac{gT^2}{2\pi} \text{tgh}(kd)$	$T\sqrt{gd}$
C <sub>g</sub>	$\frac{1}{2} C$	$C \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{zka}{\text{senh}(2kd)} \right]$	C
u	$A\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$	$A\sigma \frac{\cosh[k(d+z)]}{\text{senh}(kd)} \cos(kx - \sigma t)$	$\frac{a\sigma}{kd} \cos(kx - \sigma t)$
w	$A\sigma e^{kz} \text{sen}(kx - \sigma t)$	$A\sigma \frac{\text{senh}[k(d+z)]}{\text{senh}(kd)} \text{sen}(kx - \sigma t)$	$A\sigma \left( 1 + \frac{z}{d} \right) \cos(kx - \sigma t)$
· x	$-Ae^{kz}$	$-A \frac{\cosh[k(d+z)]}{\text{senh}(kd)} \text{sen}(kx - \sigma t)$	$\frac{A}{kd}$
· z	$Ae^{kz}$	$A \frac{\text{senh}[k(d+z)]}{\text{senh}(kd)} \cos(kx - \sigma t)$	$A \left( 1 + \frac{z}{d} \right)$



Tabla 4.1 (continuación). Ecuaciones generales de las olas para la teoría lineal para aguas profundas, intermedias y someras.

Var.	Aguas Profundas	Aguas Intermedias	Aguas Someras
$a_x$	$A\sigma^2 e^{kz}$	$A\sigma^2 \frac{\cosh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \text{sen}(kx-\sigma t)$	$\frac{A\sigma^2}{kd}$
$a_z$	$-A\sigma^2 e^{kz}$	$-A \frac{\cosh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \text{sen}(kx-\sigma t)$	$\frac{A}{kd}$
$\rho$	$A\rho g e^{kz} \cos(kx-\sigma t)$	$A\rho g \frac{\cosh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \cos(kx-\sigma t)$	$A\rho g \cos(kx-\sigma t)$
$E_p$	<p>Total <math>\frac{1}{4} \rho g A^2 Ly</math></p> <p>Dens. <math>\frac{1}{4} \rho g A^2</math></p> <p>Ancho <math>\frac{1}{4} \rho g A^2 L</math></p>	<p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2 Ly</math></p> <p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2</math></p> <p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2 L</math></p>	<p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2 Ly</math></p> <p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2 L</math></p> <p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2</math></p>
$E_c$	<p>Total <math>\frac{1}{4} \rho g A^2 Ly</math></p> <p>Dens. <math>\frac{1}{4} \rho g A^2</math></p> <p>Ancho <math>\frac{1}{4} \rho g A^2 L</math></p>	<p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2 Ly</math></p> <p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2</math></p> <p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2 L</math></p>	<p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2 Ly</math></p> <p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2</math></p> <p><math>\frac{1}{4} \rho g A^2 L</math></p>
$P$	$\frac{1}{2} EC$	$EC \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right]$	$EC$

donde  $H = 2A$  y  $C$  es la velocidad de propagación de la ola. Estos resultados son válidos cuando la viscosidad es despreciable y, por lo tanto, son aplicables fuera de la subcapa viscosa. Se ha podido establecer que para la mayoría de las aplicaciones prácticas estas aproximaciones son aceptables.

Al principio del presente capítulo se comentó que una ola era una perturbación que se produce en la interfase entre dos fluidos. Aun considerando el caso más simple en que las órbitas están cerradas, existe realmente durante el pasaje de la ola una transferencia de energía. El desplazamiento de la superficie del agua de su posición horizontal ya implica la existencia de una *energía potencial* ( $E_p$ ) mientras que el movimiento de las partículas de agua inducen una *energía cinética* ( $E_c$ ). La *energía total* de la ola ( $E_T$ ) estará representada entonces por la suma de ambas

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{16}\rho gH^2 + \frac{1}{16}\rho gH^2 = \frac{1}{8}\rho gH^2 \quad [4.22]$$

En la Tabla 4.1 se presentan diferentes variantes de la energía dependiendo de la zona de aplicación sobre la ola. La expresión [4.22] representa la energía por unidad de área ya que están promediadas sobre una longitud de onda y por un ancho de cresta igual a la unidad. En otras palabras así se define a la *densidad de energía*. Sin embargo, la energía total en los tres casos será aquella donde no se ha promediado sobre una superficie ( $1/8DgH^2Ly$ ) y la correspondiente a la energía por unidad de ancho es la promediada a lo largo de la cresta de la ola ( $1/8DgH^2L$ ).

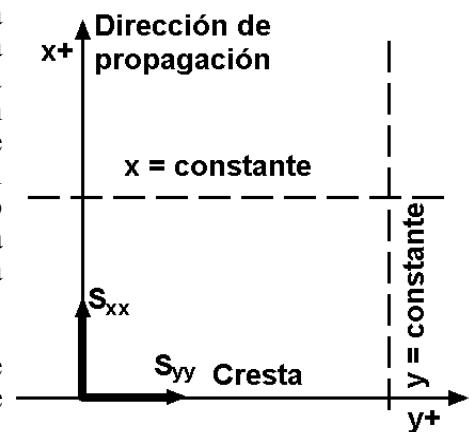


Fig.4.5.- Definición de exceso de tensiones radiantes en el plano (x,y).

Evidentemente de las expresiones del tipo de [4.22] se deduce claramente que la energía de una ola es directamente proporcional a  $H^2$ , ya que los otros términos son constantes. Ahora bien, si la onda es progresiva, la perturbación que lleva implícita cierta cantidad de energía, se moverá a lo largo de la superficie del fluido a la velocidad de propagación o dispersión  $C$ . El producto entre  $E$  y  $C$  es justamente la **Potencia (P)** de la ola que se define como **la velocidad a la que la energía de la ola es transmitida en la dirección en que se propaga la misma**. La fórmula general es

$$P = EC \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kd}{sh(2kd)} \right] \quad [4.23]$$

Si se substituye

$$n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kd}{sh(2kd)} \right] \quad [4.24]$$

la potencia queda definida como

$$P = ECn = EC_g \quad [4.25]$$

donde  $C_g$  es la *velocidad de grupo*. Debido a que el  $sh(2kd)$  tiende a infinito en aguas profundas,  $n$  tiende a  $1/2$ , resultando que los grupos o paquetes de ondas viajan a la mitad de la velocidad de propagación de las olas individuales. Mientras que cuando se pasa a aguas someras,  $n = 1$ , la velocidad de grupo es igual a la velocidad de dispersión.

Es importante hacer un aparte para explicar el concepto de velocidad de grupo ya que visto de esta forma puede resultar confuso. Hasta el momento se ha tratado en las ecuaciones a cada ola

como una unidad separada del resto de las otras olas. Sin embargo, en la naturaleza esto no es así. Cuando en el área de generación se forman olas, las mismas no existen realmente como olas individuales sino que se mueven en trenes compuestos por varias olas. Debido a que el paquete de olas se mueve a la velocidad  $1/2 C$ , la sensación que se tiene al seguir uno de estos grupos es como si las olas individuales alcanzaran al grupo por su parte posterior, luego viajará a través de él, para finalmente desaparecer por la parte anterior. En realidad, como no hay olas individuales sino energía, el paquete de olas es lo que realmente está conservando la energía inducida por el viento durante la generación del tren de olas.

Por otro lado, Longuet-Higgins y Stewart (1960,1964) demostraron que no es solo energía lo que se transmite durante la progresión de una ola sino también cantidad de movimiento o impulso. Este concepto está incluido dentro del término **tensiones radiantes** definido por estos autores como **el exceso en el flujo de cantidad de movimiento debido a la presencia de las olas**. Si por un momento se considera que el eje de las x está dispuesto en forma paralela a la dirección de propagación de las olas y el eje de las y paralelo a la línea de cresta, resulta que existen dos términos de las tensiones radiantes diferentes de cero dados por

$$S_{xx} = E \left[ \frac{1}{2} + \frac{2kd}{sh(2kd)} \right] = E \left[ 2n - \frac{1}{2} \right] \quad [4.26]$$

$$S_{yy} = E \left[ \frac{kd}{sh(2kd)} \right] = E \left[ n - \frac{1}{2} \right] \quad [4.27]$$



Fig. 4.6.- Comparación entre las soluciones de Airy, Stokes y la teoría Cnoidal (modificada de Komar, 1998).

La Fig.4.5 muestra en planta una representación de la definición de ambos términos. El primero de ellos indica el valor que tiene el flujo de cantidad de movimiento dirigido a lo largo de la dirección de propagación cuando cruza el plano donde el valor de x es igual a una constante, es decir paralelo a la costa. Se debe recordar que ambas expresiones se derivan por el solo hecho que, por su propia presencia, la ola genera un exceso de presión por sobre la presión hidrostática del lugar. Por lo tanto,

también se tendrá un flujo de cantidad de movimiento a lo largo de la cresta de la ola aunque la velocidad orbital en sentido transversal (v) es nula por definición.

### 4.3.- Teoría de Olas de Altura Finita

Como se indicó en repetidas ocasiones, la teoría de Airy o teoría lineal de olas supone que la altura de la ola es despreciable con respecto a la profundidad. Si bien esto es perfectamente válido en aguas profundas y la mayor parte de aguas intermedias, cuando una ola ingresa en aguas someras, las desviaciones entre la realidad y la teoría son cada vez mayores. Casi al mismo tiempo que Airy, Stokes (1847) derivó soluciones de segundo y tercer orden para la ecuación de Laplace. Las diferencias en la solución de esa ecuación se puede apreciar en la forma que adquieren los perfiles de las olas (Fig. 4.6) en comparación con otro tipo de ola teórica determinada por la teoría Cnoidal.

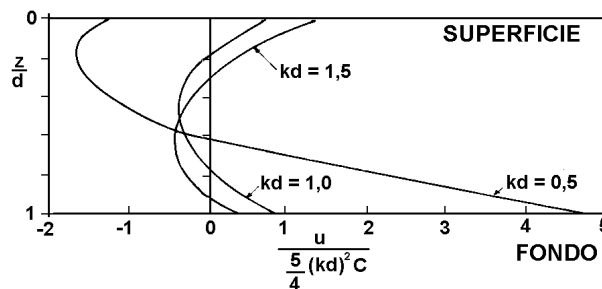


Fig.4.7.- Estructura vertical de las corrientes medias generadas por olas en un canal (modificado de Komar, 1998).

El otro aspecto destacable dentro de la teoría de Stokes es que la pendiente de la ola ( $H/L$ ) juega un papel significativo y es el parámetro sobre el que se basa la propagación de los órdenes de las ecuaciones. Ello se puede apreciar en las expresiones generales que se incluyen en la Tabla 4.2. Normalmente las expresiones de esta teoría son similares a las de Airy pero con el agregado de términos extras que son función de la pendiente de la ola.

Asimismo la teoría lineal determina que las órbitas de las partículas de agua son elipses cerradas en su caso general, cuando en realidad estas son elipses abiertas donde existe un efectivo *transporte de masa* en la dirección de propagación de ola. Para cuantificarlo, Stokes determinó que dicho transporte de masa ( $u_t$ ) es

$$u_t = \frac{A^2 k^2 C}{2} \frac{ch[2k(d+z)]}{sh(kd)} \quad [4.28]$$

Longuet-Higgins (1953) estableció para un canal de longitud finita y profundidad constante, pero con un fluido con viscosidad no despreciable, que la deriva de masa dada por [4.28] presentaba cambios de dirección con la profundidad debido a la superposición de una corriente de retorno. Por consiguiente, la resultante entre la suma de [4.28] y la corriente de retorno debida al efecto de que el canal era de longitud finita se puede apreciar en la Fig.4.7. Aunque en el mar este proceso es muy probable que ocurra, resulta extremadamente complicado de separar de los otros factores que intervienen ya que esta deriva es muy pequeña.

Tabla 4.2.- Algunas ecuaciones básicas de la teoría de Stokes en sus versiones de aguas intermedias y profundas (modificado de Komar, 1998).

Perfil de la ola (segundo orden)	
Intermedia	$h = \frac{H}{2} \cos(kx - st) + \frac{p}{2} \frac{H^2}{L} \frac{\cosh(kd)[2 + \cosh(2kd)]}{[sh(kd)]^3} \cos[2(kx - st)]$
Aguas profundas	$h = \frac{H_o}{2} \cos(kx - st) + \frac{pH_o^2}{4L_o} \cos[2(kx - st)]$
Velocidad de fase (tercer orden)	
Intermedia	$C = \frac{gT}{2p} th(kd) \left[ 1 + \left( \frac{pH}{L} \right)^2 \frac{5 + 2 \cosh(2kd) + 2 \cosh^2(2kd)}{8 \sinh^4(kd)} \right]$
Aguas profundas	$C_o = \frac{gT}{2p} \left[ 1 + \left( \frac{pH_o}{2L_o} \right)^2 \right]$
Velocidades orbitales (segundo orden)	
Horizontal	$u = \frac{pH}{T} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - st) + \frac{3}{4} \left( \frac{pH}{L} \right)^2 C \frac{\cosh[2k(z+d)]}{\sinh^4(kd)} \cos[2(kx - st)]$
Vertical	$w = \frac{pH}{T} \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - st) + \frac{3}{4} \left( \frac{pH}{L} \right)^2 C \frac{\sinh[2k(z+d)]}{\sinh^4(kd)} \sin[2(kx - st)]$

#### 4.4.- Transformación de la Ola

Las olas al pasar desde el área de generación hacia la costa sufren una serie de modificaciones producto de los procesos que ocurren en el mar en general. Durante su recorrido, las olas son filtradas por efectos de la viscosidad del agua, la interacción con otras olas y corrientes, vientos encontrados y fricción entre otros fenómenos. Estos actúan principalmente sobre olas de menor período y altura dando lugar a una selección diferencial. Pasada cierta distancia desde la generación se desprenden grupos de olas con períodos más o menos similares que viajan por supuesto a la velocidad de grupo.

Sin embargo las mayores modificaciones se producen cuando las olas entran en aguas intermedias y poco profundas (a aproximadamente  $d/L_0 = 0,25$ ). En estas circunstancias se dice que las olas "sienten el fondo" o en otras palabras el efecto de la fricción del fondo deja de ser despreciable porque la perturbación producida por la ola ya se propaga hasta él. De allí que, como se verá más adelante, se desarrolle también una capa límite para las olas.

Se pueden definir específicamente cinco tipos de modificaciones que le ocurren a la ola en estas circunstancias. Las mismas pueden actuar en forma individual o combinada y son: 1) transformación propiamente dicha; 2) *refracción*; 3) *difracción*; 4) *reflexión*, y 5) *rompiente*. Cada una de ellas serán descritas brevemente a continuación:

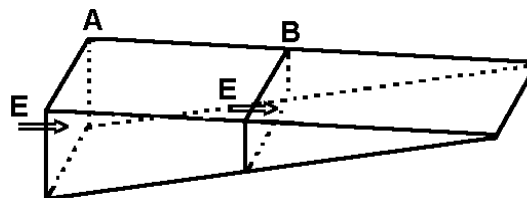


Fig.4.8.- Transferencia de energía durante la transformación de la ola.

##### 4.4.1.- Transformación

Para describir la transformación de la ola propiamente dicha debemos recordar en primer lugar que el período de la misma permanece constante y nuestra derivación estará dirigida a establecer los valores de altura resultantes del proceso. Para ello consideremos un fondo con pendiente suave como el de la Fig.4.8 donde podemos ignorar el efecto de la reflexión al igual que la disipación de energía por la fricción con el mismo. Por el principio de conservación de energía, se puede decir que la E que se encuentra dentro del segmento delimitado por ambas secciones (A y B en la figura) es constante. Esto lleva a la idea que el flujo de E o potencia (P) que ingresa a través de la sección A debe ser igual al flujo que sale por la sección B, entonces

$$P_A = P_B \quad \text{ó}$$

$$(ECn)_A = (ECn)_B = \text{constante}$$

Reemplazando [4.23] y operando algebraicamente

$$\frac{H_B}{H_A} = \left[ \frac{n_A}{n_B} \frac{C_A}{C_B} \right]^{\frac{1}{2}} \quad [4.29]$$

Ahora si se considera que la sección A se encuentra en aguas profundas y B en cualquier lugar entre A y la zona de rompiente, y recordando que  $n_0 = 1/2$  resulta

$$\frac{H}{H_0'} = \left[ \frac{1}{2n} \frac{C_0}{C} \right]^{\frac{1}{2}} = K_s \quad [4.30]$$

donde  $K_s$  es el *coeficiente de transformación* relacionando a la nueva altura (en la posición de interés) con la altura de la ola en aguas profundas. El apóstrofe indica en todos los casos que la ola no ha sufrido refracción alguna. Tanto  $C_0$  como  $C$  son funciones de  $d/L_0$  y  $d/L$ , por lo que

$$\frac{C}{C_0} = \frac{L}{L_0} = \text{tgh}(kd) \quad [4.31]$$

Si se analiza la forma que adquiere  $K_s$  (Fig.4.3, ver  $H/H_0'$ ) se ve que en aguas profundas (hasta  $d/L_0 = 0,5$ )  $K_s = 1$ . Pero al entrar en aguas intermedias, la ola pierde hasta un 15% de su altura original para volver a crecer rápidamente a medida que la ola se propaga ya en aguas poco profundas. Ello se debe a que  $n$  se incrementa más rápido que la reducción que sufre  $C$ . Este resultado teórico fue comprobado experimentalmente en un laboratorio por Iverson (1951) y puede ser apreciado directamente en una playa con *mar de leva* bastante regular.

Probablemente el efecto más interesante de los relacionados con la transformación de las olas es el cambio que ocurre con la pendiente de la ola debido a las modificaciones que sufren ambos componentes de la misma. Si bien se produce una reducción inicial al entrar en aguas intermedias guiado por que la disminución de la altura es mayor que la reducción en  $L$ , inmediatamente  $H/L$  aumenta debido a que  $H$  se agranda y  $L$  se achica hasta que la pendiente hace que la ola se inestabilice cerca de la zona de rompiente. Sin embargo, el efecto de la fricción es más importante en la desestabilización definitiva de la ola.

Las diferentes teorías que se han desarrollado para explicar la transformación que sufren las olas al acercarse a la costa consideran que la viscosidad es nula y, consecuentemente, no existe fricción. Sin embargo, diversos estudios (p.e., Resio, 1987; Madsen et al., 1988, 1990) han demostrado que la fricción no es despreciable y que tiene que tomarse en cuenta para estimar este proceso. Incluso, Madsen et al. (1988) establecieron que el tipo de dunas (y como resultado el tipo de fricción que ejerce el fondo) es diferente si las olas son monocromáticas o con períodos múltiples. En el primero de los casos las crestas son más pronunciadas dando lugar a mayor fricción de fondo que las segundas cuyas crestas son más redondeadas.

#### 4.4.2.- Refracción

La forma general de las ecuaciones para la velocidad de dispersión de la ola y para la longitud de la ola se indican en la Tabla 4.1 como

$$C = \frac{gT}{2\pi} \text{tgh}\left(2\pi \frac{d}{L}\right)$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \text{tgh}\left(2\pi \frac{d}{L}\right)$$

Dado que el período es constante, ambas ecuaciones son dependientes de la profundidad, disminuyendo los valores de  $C$  y  $L$  con una menor  $d$ . Cuando la ola se acerca a una playa con un cierto ángulo con respecto a las isobatas, se produce una diferenciación de velocidades a lo largo de la cresta. La velocidad será menor en aquella parte de la cresta donde la profundidad sea también menor. Esto produce una deformación de la cresta tal que estas tienden a colocarse paralelas a las isobatas. El proceso es conocido como refracción (Fig.4.9).

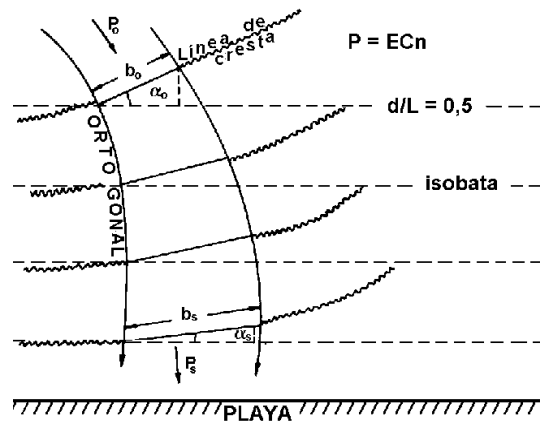


Fig.4.9.- Representación esquemática de la refracción de olas en una costa rectilínea.

Para analizar la refracción se hará una serie de suposiciones básicas que simplifiquen el problema; aunque es necesario recordar nuevamente que este es un tratamiento sobre un tren de olas singular y que naturalmente existen combinaciones de trenes de olas que implican una solución más compleja:

- a) la E no se transmite a lo largo de la cresta;
- b) tomando dos rayos ortogonales a la cresta, la E entre ambos es siempre la misma;
- c) la dirección de avance de la ola corresponde a la dirección de las ortogonales;
- d) los cambios de profundidad son graduales y C sólo depende de d para un dado T;
- e) las olas son de  $T = \text{constante}$ , de crestas largas, de pequeña amplitud y monocromáticas, y
- f) los efectos de las corrientes, vientos, reflexión y topografía del fondo son despreciables.

Partiendo del concepto de potencia total como se hizo en el caso anterior de la transformación propiamente dicha, se tiene

$$P_{T0} = P_T$$

ó

$$E_0 C_0 n_0 b_0 = ECn b = \text{constante}$$

Considerando que  $C = L/T$  y  $C_0 = L_0/T$  y operando algebraicamente

$$\frac{H}{H_0} = \left[ \frac{L_0 n_0}{L n} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{b_0}{b} \right]^{\frac{1}{2}} = K_s K_r \quad [4.32]$$

donde  $K_s$  es el coeficiente de transformación definido en [4.30] y  $K_r$  es el *coeficiente de refracción* determinado por

$$K_r = \left[ \frac{b_0}{b} \right]^{\frac{1}{2}} \quad [4.33]$$

El cambio de dirección de las ortogonales al pasar sobre una topografía simple se puede aproximar muy bien por la Ley de Snell para la refracción de rayos de luz. En efecto, la mayor parte de los procesos que sufren las olas al acercarse a la costa son directamente comparables con los que estudian las leyes básicas de la óptica de donde derivan los nombres que se emplean. De la Fig. 4.9 se puede deducir que

$$\frac{C_0}{C} = \frac{L_0}{L} = \frac{\text{sen } \alpha_0}{\text{sen } \alpha} \quad [4.34]$$

Similarmente se puede obtener el coeficiente de refracción ya que

$$\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = \frac{b_0}{b}$$

por lo tanto

$$K_r = \left[ \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \quad [4.35]$$

La Fig. 4.10 es un nomograma para el cálculo del ángulo  $\alpha$  y  $K_r$  dependiendo del valor de  $\alpha_0$  y la profundidad relativa ( $d/L_0$ ). El mismo fue estimado en función de [4.34] y [4.35].

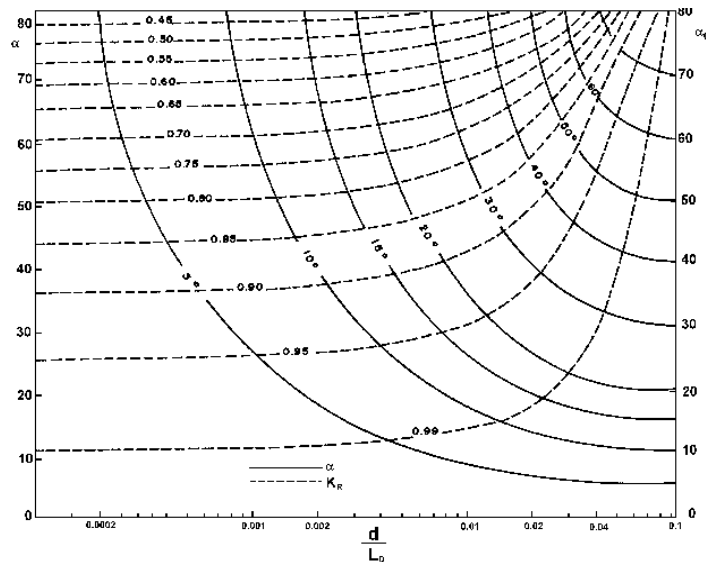


Fig.4.10.- Nomograma para el cálculo del ángulo de refracción de la ola y el coeficiente de refracción a partir del ángulo en aguas profundas y la profundidad relativa.

En la medida que exista una aproximación oblicua de la ola a la costa también existe una componente de la tensión radiante paralela a la playa, lo cual está definida por

$$S_{xy} = E n \text{sen } \alpha \cos \alpha \quad [4.36]$$

$S_{xy}$  es el flujo de cantidad de movimiento hacia la costa (representado por la dirección x normal a la costa) dirigido en forma paralela a aquella. Bowen (1969) demostró que  $S_{xy}$  es el factor fundamental en la generación de las corrientes litorales.

Una topografía irregular puede causar que las olas se refracten en una forma compleja dando lugar a una distribución irregular de las alturas de las olas a lo largo de la playa. Con las isobatas paralelas a la costa, se puede determinar en primera instancia la forma de refracción que tendrán las olas. En una bahía las olas tenderán a divergir (Fig. 4.11a) mientras que en una punta se concentrarán (Fig.4.11b). Dado que la energía existente entre dos dados rayos ortogonales es siempre la misma, cuando estos rayos se concentran se produce un incremento de la altura de la ola, mientras que sucede todo lo contrario en las zonas de divergencias.



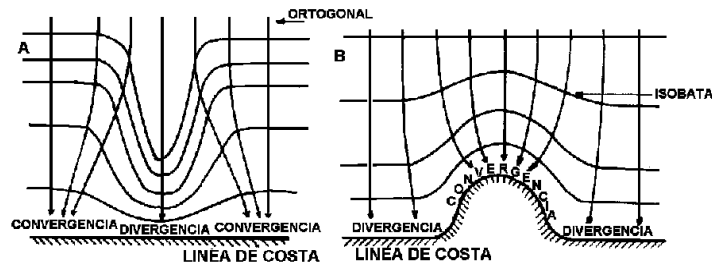


Fig.4.11.- Diagrama de refracción de trenes de olas representados por las ortogonales a las crestas: a) refracción en un cañon submarino; b) refracción en una punta (modificado de Komar, 1998).

$$\zeta = \frac{A\sigma^2}{gtg^2\beta}$$

[4.39]

#### 4.4.3.- Difracción

Al igual que la refracción, la difracción de olas tiene un paralelismo en óptica en el proceso del mismo nombre que se produce al pasar un rayo de luz a través de una pequeña abertura. La difracción en el mar ocurre en la zona de sombra de una estructura (rompeolas, espigón, espiga, etc.) donde la energía se transmite a lo largo de la cresta desde la zona de mayor altura a la de menor altura (Fig.4.12a).

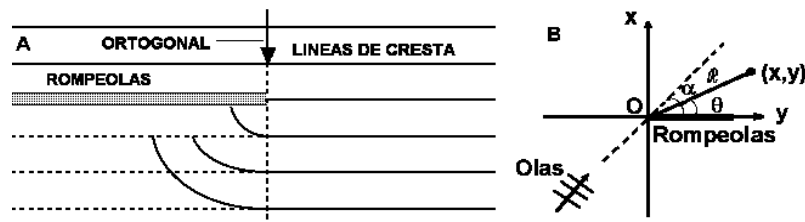


Fig.4.12.- a) Diagrama de la difracción de olas alrededor de un rompeolas rectilíneo, b) croquis de la definición del sistema de coordenadas polares para estimar  $K_D$ .

Como resultado de este proceso puede suceder que la altura de las olas en la zona de sombra (supuestamente la que se quería proteger) sea mayor que en la zona no protegida, provocando las consecuentes dificultades a las embarcaciones y otras construcciones que debían estar al amparo de la obra. Es así que existe una tendencia mundial a evitar la construcción de rompeolas porque acarrearán más problemas que los que solucionan.

Los procesos de difracción de olas producido por un rompeolas pueden ser interpretados a partir del principio de Huygens para la difracción de ondas de luz. Básicamente se supone que cada punto en el frente de avance de la ola es el centro de generación de ondas secundarias que se desplazan en todas direcciones (como si se arrojara una piedra en un estanque) en un entorno del punto. La forma de la cresta luego de un cierto tiempo  $t$  no es otra cosa que la envolvente de esas ondas secundarias. Para el caso específico de una cresta rectilínea, la envolvente será una línea recta.

Si se toma como ejemplo especial un tren de olas con crestas de longitud infinita y rectas que se aproximan con un ángulo  $\alpha$  con un rompeolas semi infinito (Fig.4.12b), Penney y Price (1952) encontraron la solución para la ecuación de Helmholtz para la elevación de la superficie (0)

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0$$

que resulta de aplicar las diferentes suposiciones y aproximaciones a la ecuación de olas. Basados

en la teoría de difracción de luz de Sommerfeld, ellos obtuvieron el **coeficiente de difracción** ( $K_D$ ), definido como el cociente entre la altura de la ola difractada y la altura de la ola incidente como

$$K_D = \left| I \left[ -\sqrt{\frac{4k\mathfrak{R}}{\pi}} \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha - \theta}{2} \right) \right] e^{-ik\mathfrak{R} \cos(\alpha - \theta)} + I \left[ -\sqrt{\frac{4k\mathfrak{R}}{\pi}} \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha + \theta}{2} \right) \right] e^{-ik\mathfrak{R} \cos(\alpha + \theta)} \right|$$

calculado para las coordenadas polares ( $U, 1$ ) y donde  $I(\mathfrak{R})$  es una integral de Fresnel cuyo argumento es  $\mathfrak{R}$  y definida como

$$I(\lambda) = \frac{1 + i}{2} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-i\frac{\pi\lambda^2}{2}} d\lambda$$

#### 4.4.4.- Reflexión

Al llegar a la playa o chocar contra una estructura, las olas se reflejan como si fuese una imagen contra un espejo. El nivel de reflexión es definido por las características de reflectividad de la estructura contra la cual han chocado. En el caso de una pared vertical, perfectamente reflectiva, el resultado es la superposición entre la *ola incidente* y la *ola reflejada* dando lugar al desarrollo de una ola estacionaria cuya amplitud es exactamente el doble que la amplitud de la ola incidente ( $A_i$ ). De esta forma se puede definir al *coeficiente de reflexión*  $K_R$  como

$$K_R = \frac{A_R}{A_i} \quad [4.37]$$

donde  $A_R$  es la amplitud de la ola reflejada. Obviamente este es el caso extremo, en general se tiende a construir rompeolas que tengan un coeficiente de reflexión muy bajo para disminuir la energía de las olas. El perfil de los rompeolas es de baja inclinación similar al de las playas.

El grado de reflectividad en playas ha sido relacionado con el *Número de Iribarren* ( $E$ ) y el *parámetro de Similaridad de Deslizamiento* ( $\Sigma$ ) definidos por Iribarren y Nogales (1949) y Carrier y Greenspan (1958), respectivamente como

$$\Sigma = \frac{tgb}{(H_0 / L_0)^{0.5}}$$

onde  $A$  es la amplitud de la ola y  $\$$  es la pendiente de la playa o estructura. Wright et al. (1986) indican que las playas totalmente disipativas poseen valores de  $\Sigma$  entre 30 y 500, mientras que las playas totalmente reflectivas tienen valores menores que 2,5. La relación entre ambos números está dada por

$$z = p\Sigma^{-2} \quad \text{o} \quad \Sigma = \left( \frac{z}{p} \right)^{0.5}$$

Wright et al. (1979) emplearon este criterio para establecer una serie de relaciones geomorfológicas y dinámicas de las playas y definir un criterio de clasificación continua de las mismas basados en estos parámetros.

#### 4.4.5.- Rompientes

Cuando las olas pierden su carácter de tales lo

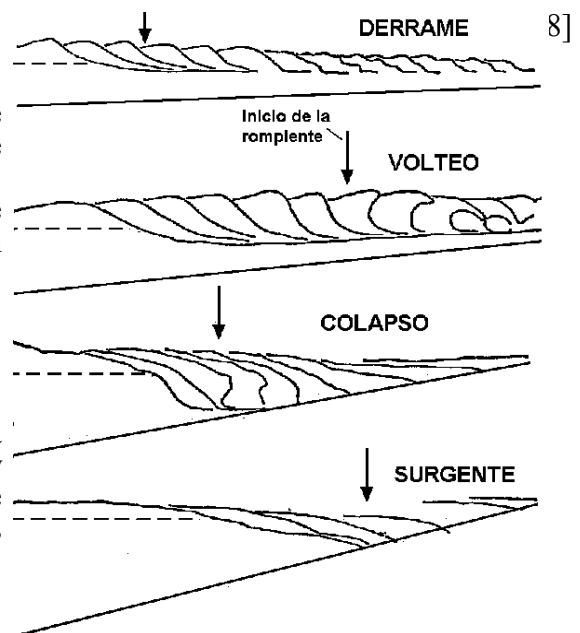


Fig.4.13.- Proceso de formación de rompientes de olas basado en los análisis de laboratorio de Galvin (1968).